UNIDAD N°4
Funciones
Funciones exponencial y logarítmica

Asignatura

Matemática PI

Universidad Provincial del Sudoeste

Autor

Dr. Ing. Carlos Berger

DOCUMENTO TEÓRICO

Unidad N°4. Funciones: Funciones exponencial y logarítmica

Asignatura: Matemática PI

INDICE DE CONTENIDOS

1. FUNCIÓN EXPONENCIAL

1.1. Definición

La función definida por $f(x)=b^x$ donde $b>0,\ b\neq 1$, y el exponente *x* es cualquier número real, se llama ***función exponencial*** con base *b*.

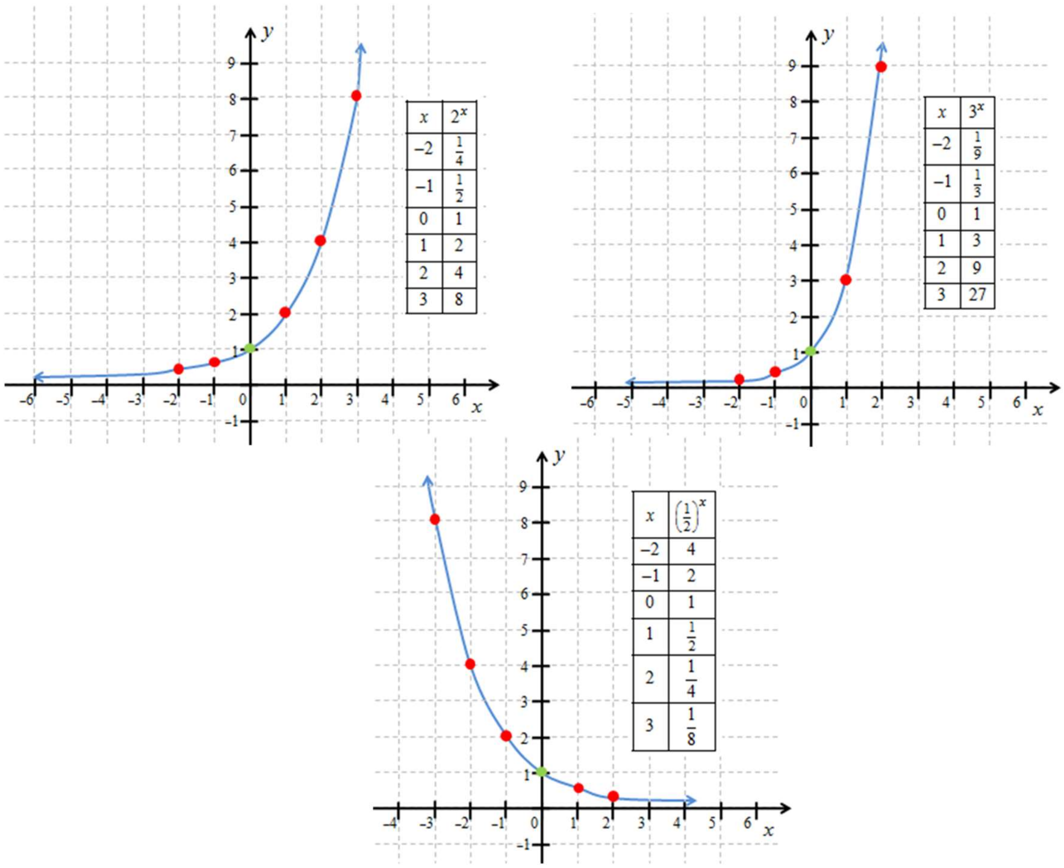
Importante: no confundir la función exponencial con la función potencia. Por ejemplo, no es lo mismo la función exponencial $y=2^x$ que la función potencia $y=x^2$, en ésta última la base es variable y el exponente es constante.

1.2. Gráfico

Para comprender el gráfico de una función exponencial, utilizaremos una tabla de valores para ubicar inicialmente algunos puntos. Este procedimiento es sólo para explicar la forma de la función, por lo que en los ejercicios siguientes omitiremos esta tabla y partiremos del gráfico base con sus características más importantes.

Teniendo en cuenta la definición, debemos considerar que los valores de la base deben ser estrictamente positivos y distintos de 1. Tomaremos como ejemplo b=2, b=3, b=1/2.

FIGURA 1. Funciones exponenciales para b=2, b=3, b=1/2.



x	2^x
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8

x	3^x
-2	$\frac{1}{9}$
-1	$\frac{1}{3}$
0	1
1	3
2	9
3	27

x	$\left(\frac{1}{2}\right)^x$
-2	4
-1	2
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$

En la figura anterior podemos ver la forma general de estas funciones. Intuitivamente, podemos notar que todas tienen un punto en común en (0,1) (punto en verde). Además, vemos que ninguna de las gráficas pasa por debajo del eje x, y notamos que tiene una forma curvada, que depende del valor de la base.

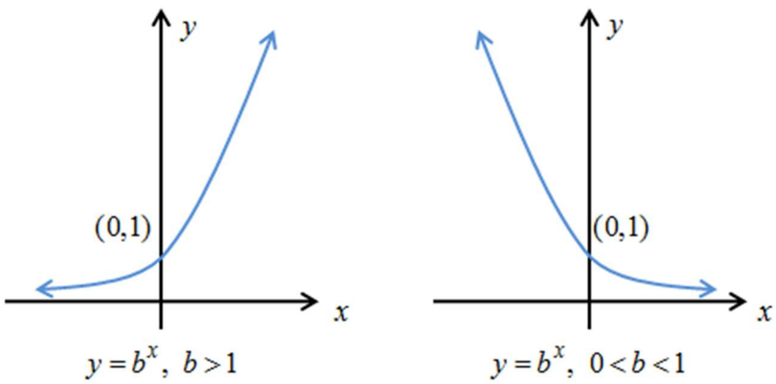
Resumimos estas características formalmente:

- ✓ Todas estas gráficas pasan por el punto (0,1) porque $b^0 = 1$ para todo $b \neq 0$.
- ✓ Si $0 < b < 1$, entonces la función se aproxima a 0 cuando *x* se hace grande. El gráfico desciende de izquierda a derecha.
- ✓ Si $b > 1$, entonces la función se aproxima a 0 cuando *x* disminuye pasando a valores negativos. El gráfico asciende de izquierda a derecha.
- ✓ Para cualquier valor posible de la base, la función está definida para cualquier valor real, por lo tanto $Dom \ \ f(x) = \mathbb{R}$.
- ✓ La función toma todos los valores posibles positivos, es decir $Img \ \ f(x) = (0, +\infty)$.

Generalmente, el caso b=1 no es considerado como función exponencial, ya que se obtiene la función constante.

En resumen, el gráfico de la función exponencial dependerá del valor de la base, y tendrá la forma indicada en la figura 2.

FIGURA 2. Forma general de las funciones exponenciales.



1.3. Reglas de los exponentes

Cuando se trabaja con funciones exponenciales puede ser necesario aplicar las reglas de los exponentes. Estas reglas se presentan a continuación, en ellas *m* y *n* son números reales y *a* y *b* son positivos.

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	2. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
3. $\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$	4. $\left(ab\right)^n = a^n b^n$
5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$	6. $a^1 = a$
7. $a^0 = 1$	8. $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

Algunas funciones que no parecen tener la forma exponencial a^x pueden ponerse en esa forma aplicando las reglas anteriores.

Ejem

Ejemplo 1: Expresar, si es posible, una forma simplificada como función exponencial para las siguientes expresiones:

$$a)\ 2^{-x} \qquad b)\ 3^{2x} \qquad c)\ \frac{2^{3x}}{4^{2x}}$$

a) En este caso, utilizamos la propiedad 8 para reescribir la potencia negativa, y luego la propiedad 5:

$$2^{-x} = \frac{1}{2^x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

b) Utilizando la propiedad 3:

$$3^{2x} = \left(3^2\right)^x = 9^x$$

c) Utilizando las propiedades 5 y 3:

$$\frac{2^{3x}}{4^{2x}} = \frac{\left(2^3\right)^x}{\left(4^2\right)^x} = \frac{8^x}{16^x} = \left(\frac{8}{16}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

1.4. Transformaciones de funciones exponenciales

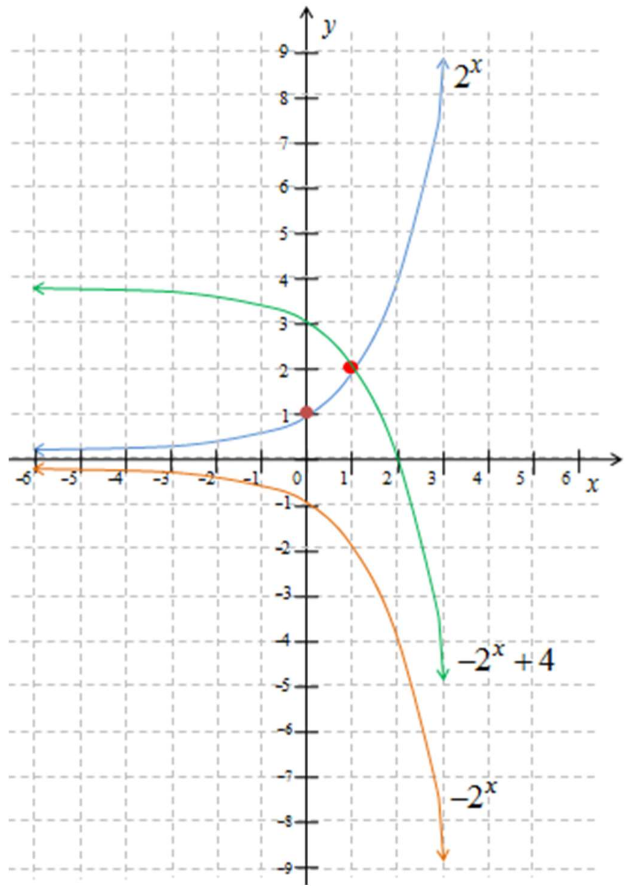
Para graficar funciones exponenciales que incluyen transformaciones, utilizamos los conceptos detallados en la primera parte de esta unidad.

Ejem

Ejemplo 2: Trazar la gráfica de la función $y = 4 - 2^x$ y determinar dominio e imagen.

Debemos identificar cuál es la función base para efectuar las transformaciones. Si nos enfocamos en el valor más cercano a la ubicación de la x, vemos que es el número 2. Por lo tanto elegimos la función exponencial de base 2. Primero reflejamos la gráfica de $y = 2^x$ respecto al eje *x* para obtener la gráfica de $y = -2^x$. A continuación desplazamos la gráfica de $y = -2^x$, 4 unidades hacia arriba para obtener la función buscada. El dominio es $\mathbb{R}$ y la imagen es $(-\infty, 4)$.

FIGURA 3. Función exponencial con transformaciones (ejemplo 2).



1.5. Función exponencial natural

Esta función se define para el caso particular que la base es el número irracional *e*. Como aproximación podemos indicar:

$$e \approx 2.71828$$

Debido a que este valor se encuentra entre los enteros 2 y 3, su gráfica también se ubica entre las de 2^x y 3^x . Más adelante veremos la importancia de esta función.

2. FUNCIÓN LOGARÍTMICA

2.1. Definición

El concepto de función logarítmica está muy relacionado con la función exponencial. Cuando en una expresión como $y = 7x + 5$ queremos "despejar" la x, aplicamos una operación que "cancele" la suma y luego la multiplicación, es decir que restamos 5 y dividimos por 7 a cada lado. Este procedimiento se conoce como cálculo de la función inversa. Para el caso de una función exponencial de la forma $y = b^x$, no conocemos hasta ahora la operación que cancele el cálculo asociado a esta expresión. Así surge la necesidad de especificar la función logarítmica, como inversa de la exponencial de acuerdo a la siguiente definición.

La ***función logarítmica de base b***, con $b > 0$ y $b \neq 1$, se denota por log_b y se define como $y = log_b(x) \quad sí \quad y \quad sólo \quad sí \quad b^y = x$

El dominio de $log_b(x)$ es el conjunto de todos los números reales positivos y la imagen es el conjunto de todos los números reales. Al valor *x* se lo llama ***argumento*** del logaritmo.

Cuando decimos que *y* es el logaritmo base *b* de *x*, queremos decir que *b* elevado a la potencia *y* es igual a *x*. Entonces, $log_b(x)$es la potencia a la cual se debe elevar *b* para obtener *x*. Por ejemplo,

$$log_2 8 = 3 \quad porque \quad 2^3 = 8$$

Ejemplo 3: Conversión entre forma exponencial y logarítmica

a) Conversión de forma exponencial a logarítmica

Forma exponencial		*Forma logarítmica*
a) Como $6^2 = 36$	se concluye que	$log_6 36 = 2$
b) Como $2^4 = 16$	se concluye que	$log_2 16 = 4$
c) Como $7^0 = 1$	se concluye que	$log_7 1 = 0$

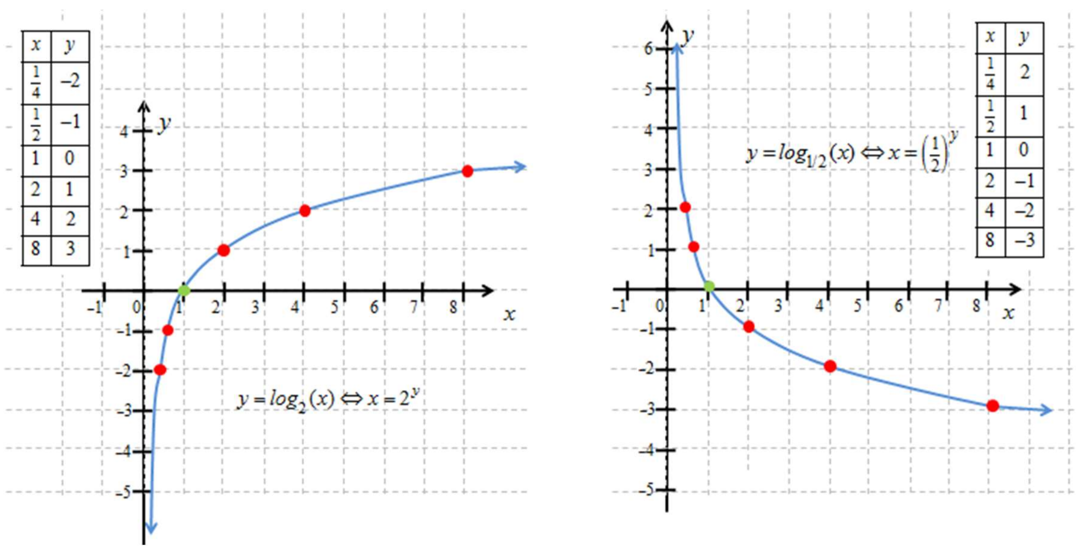
b) Conversión de forma logarítmica a exponencial

Forma logarítmica		*Forma exponencial*
a) $log_{10} 100 = 2$	significa	$10^2 = 100$
b) $log_{49} 7 = \frac{1}{2}$	significa	$49^{\frac{1}{2}} = \sqrt{49} = 7$
c) $log_2 \frac{1}{32} = -5$	significa	$2^{-5} = \frac{1}{32}$

2.2. Gráfico

De forma similar a la función exponencial, presentaremos el gráfico a partir de una tabla de valores. Sin embargo, para este caso puede ser difícil sustituir valores de *x* y después encontrar los correspondientes valores de *y*. Una forma más sencilla para trazar puntos es utilizar la forma exponencial equivalente, entonces seleccionamos valores de *y* y encontramos los correspondientes valores de *x*. Elegimos como ejemplo b=2 y b=1/2.

FIGURA 4. Funciones logarítmicas para b=2, b=1/2.



En la figura anterior podemos ver la forma general de estas funciones. Intuitivamente, podemos notar que tienen un punto en común en (1,0) (punto en verde). Además, vemos que ninguna de las gráficas pasa hacia la izquierda del eje y, y notamos que tiene una forma curvada, que depende del valor de la base.

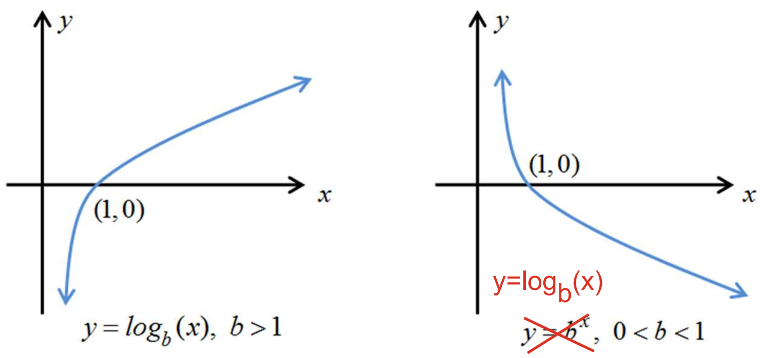
Resumimos estas características formalmente:

- ✓ El dominio de una función logarítmica es el intervalo $(0, \infty)$ (todos los reales positivos). No existe logaritmo de números negativos ni del cero.
- ✓ La imagen son todos los reales.
- ✓ El logaritmo de 1 es 0 en cualquier base posible, que corresponde a la intersección con el eje *x* en el punto (1,0).
- ✓ Si *b>1*, la gráfica asciende de izquierda a derecha. Cuando *x* se acerca a 0, los valores de la función disminuyen rápidamente y el gráfico se acerca cada vez más al eje *y*, sin llegar a intersectarlo.

- ✓ Si *0<b<1*, la gráfica desciende de izquierda a derecha. Cuando *x* se acerca a 0, los valores de la función aumentan rápidamente y el gráfico se acerca cada vez más al eje *y*, sin llegar a intersectarlo.

En resumen, el gráfico de la función logarítmica dependerá del valor de la base, y tendrá la forma indicada en la figura 5.

FIGURA 5. Forma general de las funciones logarítmicas.



Los logaritmos de base 10 son llamados ***logaritmos comunes***. En la notación se omite el subíndice 10:

$$log(x) \quad significa \quad log_{10}(x)$$

Los logaritmos de base *e* también son importantes en cálculo y se conocen como ***logaritmos naturales***. Se usa la notación "ln":

$$ln(x) \quad significa \quad log_{e}(x)$$

2.3. Cálculo de logaritmos

Para calcular logaritmos manualmente debemos recurrir a la forma exponencial equivalente.

Ejemplo 4: Calcular los siguientes logaritmos:

$i)\, log(1000) \qquad ii)\ ln(1) \qquad iii)\, log(0,01) \qquad iv)\, ln(e^4) \qquad v)\ log_{25}(5)$

i) La base es 10. Queremos encontrar el exponente al cual se debe elevar 10 para obtener 1000. Como $10^3 = 1000$, entonces $log(1000) = 3$.

b) La base es *e*. Como $e^0 = 1$, entonces $ln(1) = 0$.

c) La base es 10. Como $0.01 = \frac{1}{100} = 10^{-2}$, entonces $log(0.01) = -2$.

d) La base es *e*. Como $e^4 = e^4$, entonces $ln(e^4) = 4$.

e) La base es 25. Como $5^2 = 25 \Rightarrow 25^{\frac{1}{2}} = 5$, entonces $log_{25}(5) = \frac{1}{2}$.

2.4. Propiedades de los logaritmos

Las siguientes propiedades son válidas para *b>0, a>0* y siempre que el logaritmo esté definido.

1. $log_b(mn) = log_b(m) + log_b(n)$
2. $log_b\left(\frac{m}{n}\right) = log_b(m) - log_b(n)$
3. $log_b(m^r) = r \cdot log_b(m)$
4. $log_b\left(\frac{1}{m}\right) = -log_b(m)$
5. $log_b(1) = 0$
6. $log_b(b) = 1$
7. $log_b(b^r) = r$
8. $b^{log_b(m)} = m$
9. $log_b(m) = \dfrac{log_a(m)}{log_a(b)}$: *Fórmula de cambio de base*

Ejemplo 5: Expresar en términos de log(x) los siguientes logaritmos:

$i)\ log\left(\frac{1}{x}\right) \qquad ii)\ log\left(\frac{10}{x^2}\right)$

i) $log\left(\frac{1}{x}\right) = log(x^{-1}) = -log(x)$ (Propiedad 3)

ii) $log\left(\frac{10}{x^2}\right) = log(10) - log\left(x^2\right) = 1 - 2log(x) \quad (sólo\ si\ x > 0)$ (Propiedades 2, 6 y 3)

Ejemplo 6: Escribir $3ln(5) + ln(2) - ln(6) - 2ln(8)$ como un sólo logaritmo.

$$3ln(5) + ln(2) - ln(6) - 2ln(8) = ln(5^3) + ln(2) - ln(6) - ln(8^2) =$$

$$= ln(5^3) + ln(2) - [ln(6) + ln(8^2)] = ln(5^3 \cdot 2) - ln(6 \cdot 8^2) = ln(125 \cdot 2) - ln(6 \cdot 64) = ln\left(\frac{250}{384}\right)$$

Ejemplo 7: Utilizar una calculadora para evaluar $log_5(2)$.

Las calculadoras comunes tienen teclas para logaritmos comunes y naturales. Podemos utilizar la fórmula de cambio de base para obtener logaritmos en otras bases. Por ejemplo, cambiando a logaritmos comunes:

$$log_5(2) = \frac{log(2)}{log(5)} \approx 0.4307$$

Si elegimos cualquier otra base para hacer el cambio, obtenemos el mismo resultado.

2.5. Ecuaciones logarítmicas y exponenciales

Para resolver estas ecuaciones, tendremos en cuenta las propiedades anteriores, las reglas de los exponentes, y las siguientes:

Regla de igualdad de argumentos: Si $log_b(m) = log_b(n)$, entonces *m=n.*

Regla de igualdad de exponentes: Si $b^m = b^n$, entonces *m=n.*

Ejemplo 8: Resolver

$i)\ log_3(x) = 2 \quad ii)\ ln(x+2) = 4 \quad iii)\ log_x(64) = 2 \quad iv)\ e^{3x} = 5$.

i) Escribiendo en forma exponencial tenemos: $3^2 = x$ entonces *x*=9.

ii) La forma exponencial es $e^4 = x + 2$, entonces $x = e^4 - 2$

iii) En forma exponencial $x^2 = 64$, entonces $x = 8$. (No puede ser el valor negativo)

iv) La forma logarítmica es $ln(5) = 3x$, entonces $x = \frac{ln(5)}{3}$

Ejemplo 9: Resolver $(16)^{x-1} = 4^{3x+5}$

Como $16 = 4^2$, podemos expresar ambos lados de la ecuación como potencias de 4.

$$(16)^{x-1} = 4^{3x+5} \Rightarrow (4^2)^{x-1} = 4^{3x+5} \Rightarrow (4)^{2x-2} = 4^{3x+5}$$

Por la propiedad de igualdad de exponentes,

$$2x - 2 = 3x + 5 \Rightarrow 2x - 3x = 5 + 2 \Rightarrow -x = 7 \Rightarrow x = -7.$$

Ejemplo 10: Resolver $3 + (2)6^{x+1} = 19$

Es conveniente separar el término que contiene a la x, es decir 6^{x+1}, en un lado de la ecuación:

$$3 + (2)6^{x+1} = 19 \Rightarrow (2)6^{x+1} = 16 \Rightarrow 6^{x+1} = \frac{16}{2} = 8$$

Una vez que logramos lo anterior, podemos aplicar el logaritmo de la misma base que la exponencial para completar el despeje. Es importante notar que esto se hace en ambos lados de la expresión.

$$log_6\left(6^{x+1}\right) = log_6(8) \Rightarrow x+1 = log_6(8) \Rightarrow x = log_6(8) - 1$$

$$x = \frac{ln(8)}{ln(6)} - 1 \approx 0.160558$$

Ejemplo 11: Resolver $log_2(x) = 7 - log_2(x+28)$

En primer lugar debemos notar que debe verificarse $x > 0$ y $x+28 > 0$ para que los logaritmos estén definidos. Ambas condiciones se cumplen si $x > 0$. Para resolver la ecuación, primero colocamos todos los logaritmos en un miembro de modo que podamos aplicar la propiedad 1:

$$log_2(x) + log_2(x+28) = 7 \Rightarrow log_2\left[x(x+28)\right] = 7$$

Ahora pasamos a la forma exponencial:

$$x(x+28) = 2^7 \Rightarrow x^2 + 28x = 128$$

$$x^2 + 28x - 128 = 0 \qquad (ecuación\ \ cuadrática)$$

$$(x-4)(x+32) = 0$$

$$x = 4 \ \ ó \ \ x = -32$$

Como debe ser $x > 0$, la única solución válida es $x = 4$.

Ejemplo 12: Resolver $log_{1/3}(x+1) = log_{1/3}(x-1) + 1$

En este caso debe ser $x+1 > 0$ y $x-1 > 0$, es decir $x > 1$. Colocamos todos los logaritmos en un mismo miembro y los combinamos:

$$log_{1/3}(x+1) - log_{1/3}(x-1) = 1 \Rightarrow log_{1/3}\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 1$$

Pasamos a la forma exponencial:

$$\frac{x+1}{x-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^1 \Rightarrow x+1 = \frac{1}{3}(x-1) \Rightarrow \frac{2}{3}x = -\frac{4}{3} \Rightarrow x = -2$$

Como debe ser x>1, la ecuación no tiene solución.

3. BIBLIOGRAFÍA

- Arya, J. C.; Lardner, R. W. (2009). "Matemáticas aplicadas a la administración y a la economía", quinta edición. México: Pearson Educación.
- Haeussler, E. F.; Paul, R. S. (2003). "Matemáticas para Administración y Economía", décima edición, México: Pearson.
- Stewart, J.; Redlin, L.; Watson, S. (2012). "Precálculo. Matemáticas para el cálculo", sexta edición. México: CengageLearning.
- Tussy, A. S.; Gustafson, R. D. (2006). "Matemáticas Básicas", tercera edición, México:CengageLearning.